Capítulo 5

El modelo de Hines, Tarasick y Shepherd de los efectos de ondas gravitatorias sobre la luminiscencia del cielo nocturno , y su aplicabilidad a la marea semidiurna.

En los trabajos de Hines y Tarasick [1987], Tarasick y Hines [1990], y Tarasick y Shepherd [1992a, b], los autores desarrollaron un modelo que describe los efectos observables en la luminiscencia del cielo nocturno como consecuencia del paso de ondas gravitatorias. Como los resultados de este modelo (que se abreviará a continuación como modelo HTS) son utilizados para calcular la longitud de onda vertical, se los resume a continuación. Luego se muestra como se modifican las expresiones del modelo HTS cuando se considera la fuerza de Coriolis, y se discuten las asunciones hechas para poder aplicar el modelo a la componente semidiurna de la marea solar.

5.1 - El modelo de Hines, Tarasick y Shepherd

El modelo HTS (y otros como el de Weinstock [1978]; Walterscheid *et al.* [1987]; Schubert y Walterscheid [1988], etc.) usa el parámetro observacional η de Krassovsky [1972] para relacionar las mediciones de luminiscencia con las ondas gravitatorias

$$\eta = \frac{B'/B_0}{T'/T_0} \tag{5.1}$$

Aquí, B_0 y T_0 son la intensidad y temperatura medias, medidas desde el suelo, y B' y T' son las amplitudes de las respectivas oscilaciones causadas por la onda. Las intensidades corresponden a la integral sobre todas las alturas, y las temperaturas, al promedio del perfil de temperaturas pesado por el perfil de emisiones.

En el trabajo de Hines y Tarasick [1987] se muestra como, para una atmósfera con temperatura constante, la contribución en η debida a la perturbación adiabática de la onda puede ser parcialmente separada de la contribución debida a la química. De este modo, a partir de las mediciones de temperaturas e intensidades, es posible sacar conclusiones acerca de las ondas gravitatorias que son independientes del mecanismo específico de emisión. Tarasick y Hines [1990] extienden el modelo al caso de observaciones no cenitales y ondas con cualquier dirección de propagación horizontal. Para un mecanismo simple de emisión en una atmósfera con poca variación de temperatura, y en la aproximación lineal obtienen

$$\eta \cong \eta^c = (\chi - \mu - i\nu)(\gamma - 1)^{-1} \tag{5.2}$$

donde η^c es el valor de η para la atmósfera isotérmica,
γ es la razón de los calores específicos $c_p/c_v = 1.4$,
μ y ν son parámetros adimensionales que dependen esencialmente de los parámetros de onda y de la distancia cenital del punto observado en la capa de emisión, y
χ es un coeficiente vinculado con la velocidad de reacción y con el número de reactivos involucrados en la producción de la molécula emisora.

Las expresiones de los parámetros μ y ν dependen de si las ondas tienen propagación vertical (número de onda vertical k_z real), o si son evanescentes (k_z imaginario). Para las llamadas "ondas gravitorias internas" (esto es, con k_z real, y con períodos en el rango de algunos minutos a algunas horas), en mediciones cenitales, el parámetro ν puede ser aproximado por

$$\nu \cong -\gamma H k_z \tag{5.3}$$

Como sugieren Tarasick y Hines [1990], relacionando (5.2) y (5.3) es fácil obtener una forma práctica de evaluar la longitud vertical de onda λ_z (= $2\pi/k_z$) y el sentido de propagación

$$\lambda_z \cong \frac{2\pi\gamma H}{(\gamma - 1)|\eta| \sin\phi} \tag{5.4}$$

El ángulo ϕ es la diferencia de fase entre las oscilaciones de intensidad y de temperatura (o sea, la fase de η), y es positivo cuando la fase de intensidad se adelanta a la de temperatura. El sentido de propagación vertical está dado por el signo de λ_z: cuando es positivo, la energía de la onda se propaga hacia abajo y la fase hacia arriba (mientras $\chi > \mu$, condición dada para el O_2 y el OH según los trabajos mencionados).

Las amplitudes de las ondas de corta longitud vertical, en el orden del espesor de la capa de emisión, se ven atenuadas desde el suelo, debido a la compensación de fases en la integración vertical. En consecuencia, el método de observación es selectivo para las grandes longitudes de onda verticales y para las ondas evanescentes.

Tarasick y Shepherd [1992a, b] incorporan al modelo diferentes mecanismos de producción y pérdida de las moléculas excitadas de O_2 y OH. Incluyen desactivaciones colisionales ("quenching") y reacciones alternativas de formación y pérdida en una o más etapas. En este contexto, el coeficiente χ es variable con la altura y la fórmula (5.2) para η no es directamente aplicable. Sin embargo, Tarasick y Shepherd mostraron que utilizando en (5.2) el valor de χ correspondiente a la altura de máxima emisión, se obtiene una buena aproximación de η a la solución exacta que incluye también la variación de la temperatura con la altura.

Para el caso del OH, donde las constantes de tiempo de las reacciones químicas son del orden de los períodos de ondas gravitatorias, el valor de χ es complejo y (5.2) se convierte en

$$\eta \cong \eta^c = [(\chi_R - \mu) + i(\chi_i - \nu)](\gamma - 1)^{-1} \qquad (5.5)$$

donde χ_R y χ_i son la parte real e imaginaria de χ respectivamente. En este caso la expresión (5.4) es una buena aproximación sólo cuando $\nu \gg \chi_i$ y debería modificarse como

$$\lambda_z \cong \frac{2\pi \gamma H}{(\gamma - 1)|\eta| \sin\phi - \chi_i} \qquad (5.6)$$

La desventaja del uso de esta expresión en vez de (5.4) es que debe conocerse el valor de χ_i que depende de la química involucrada. Tarasick y Shepherd [1992b] encuentran valores positivos de χ_i para el OH, por lo cual la aplicación directa de (5.4) implica una sobreestimación de λ_z para ondas con propagación de energía hacia arriba y una subestimación en el caso contrario, si bien este efecto puede ser pequeño.

Para ondas evanescentes (k_z imaginario) se tiene la siguiente ecuación para ν

$$\nu = \frac{-k_x(\gamma g H k_h^{\,2} - \omega^2)\tan\theta}{k_h^{\,2} g + i k_z \omega^2 - \omega^2/2H}$$

donde k_x y k_h es la componente en la dirección x y la resultante horizontal del número de onda, respectivamente y θ es la distancia cenital del punto observado en la capa de emisión. En consecuencia, para ondas evanescentes ν es cero en mediciones cenitales (θ =0). Entonces, teniendo en cuenta (5.2), $|\eta|\sin\phi = 0$, y la ec. (5.4) da una longitud de onda vertical infinita. En la práctica, debido a la posible contribución de χ_i y al error en la determinación en η, el valor de λ_z resulta finito, con $|\lambda_z|$ seguramente mayor a 100km. Por el otro lado, ésto permite asegurar que $|\lambda_z|$ menores a 100km, sólo puede corresponder a ondas gravitatorias internas (no evanescentes).

5.2 - Extensión del modelo de Hines, Tarasick y Shepherd a bajas frecuencias y su validez para la marea semidiurna:

Para frecuencias en el orden de la rotación terrestre o menores, como es el caso de las componentes diurna y semidiurna de la marea, la fuerza de Coriolis no puede ser despreciada en las ecuaciones de movimiento. La inclusión de esta fuerza conduce a modificaciones en las expresiones de los parámetros μ y ν dadas en el paper de Tarasick y Hines [1990], y no es *a priori* claro cómo ésto afecta la determinación de la longitud de onda, λ_z.

Aquí se muestran los resultados, para este caso, obtenidos a partir de las ecuaciones de movimiento, continuidad y conservación de la energía para una onda plana que se propaga adiabáticamente en una atmósfera uniforme y estacionaria. Los detalles están dados en el Apéndice B. Siguiendo a Hines [1960], se propone la siguiente solución general

$$u/X = v/Y = w/Z = p/(\rho_0 P) = \rho/(\rho_0 R) = A\, e^{z/2H}\, e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} \tag{5.7}$$

Aquí u, v y w son las componentes zonal, meridional y vertical respectivamente de la perturbación en las velocidades debida al paso de la onda. p y ρ son la perturbación en la presión y densidad respectivamente, y p_0 y ρ_0 son la presión y densidad para la atmósfera no perturbada. H es la altura de escala, ω es la frecuencia angular de la onda y k_x, k_y y k_z son las componentes zonal, meridional y vertical, respectivamente, del número de onda. A es un factor de escala. La solución da las relaciones de polarización

$$\begin{aligned}
X &= (\gamma/2-1)gfk_y + c^2\omega k_x k_z + i\{\omega^2\beta + (\gamma/2-1)g\omega k_x - c^2\beta k_y^{\,2} - c^2 f k_y k_z\}\\
Y &= -\omega f\beta + (1-\gamma/2)gfk_x + c^2\omega k_y k_z + i\{(\gamma/2-1)g\omega k_y + c^2\beta k_x k_y + c^2 f k_x k_z\}\\
Z &= \omega^3 - c^2\omega k_h^{\,2} - \omega f^2\\
P &= \gamma(\omega^2 - f^2)k_z - \gamma f\beta k_y + i\{(\gamma/2-1)(\omega^2 - f^2)/H + \gamma\omega\beta k_x\}\\
R &= (\omega^2 - f^2)k_z - f\beta k_y + i\{(f^2 - \omega^2)/H + \omega\beta k_x + (\gamma-1)gk_h^{\,2}\}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

donde γ es la razón de calores específicos, c la velocidad del sonido, g la aceleración de la gravedad, y los parámetros de Coriolis f y β son definidos como

$$f = 2\,\Omega \sin\varphi \qquad \text{y} \qquad \beta = 2\,\Omega \cos\varphi \tag{5.9}$$

donde φ es la latitud geográfica y Ω es la frecuencia angular de la rotación terrestre.

Las ecuaciones (5.8) y las que siguen en esta sección se convierten, naturalmente, en las dadas en Hines [1960] y Tarasick y Hines [1990] para el caso especial de f, β y $\Omega = 0$.

También se obtiene la siguiente relación de dispersión,

$$\omega^4 + (f^2 - \omega^2)c^2/(4H^2) - \omega^2 c^2(k_h^2 + k_z^2) - 4\,\omega^2\Omega^2 + c^2(k_y\,\beta + k_z f)^2 +$$
$$+ (2-\gamma)\omega g k_x\,\beta + g^2 k_h^2(\gamma - 1) = 0 \qquad (5.10)$$

donde $k_h^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Al utilizar las ecuaciones (5.8) y (5.10) en el modelo HTS, se modifican las fórmulas de los parámetros μ y ν dadas en las ec. (48), (53) y (54) de Tarasick y Hines [1990]. Se obtiene

$$\mu + i\nu = \frac{(-ik_x \tan\theta - ik_z + 1/2H)(c^2k_h^2 + f^2 - \omega^2)}{gk_h^2 - (\omega^2 - f^2)/(2H) - \omega\beta k_x + i(\omega^2 - f^2)k_z - i\,f\beta k_y} \qquad (5.11)$$

Para el caso particular de las ondas "inercio-gravitorias" propiamente dichas (con k_z real) resulta

$$\mu = B/D \qquad \text{y} \qquad \nu = C/D \qquad (5.12)$$

donde

$$B = -k_x\,c^2\tan\theta(\omega^2 k_z - f^2 k_z - f\beta k_y)/(g^2k_h^2) + 1 - \gamma/2 - \omega\beta k_x(2-\gamma/2)/(gk_h^2) +$$
$$+ c^2\omega^2[1 - \omega^2/(c^2k_h^2)]/g^2 + 4\,\omega^2\Omega^2/(g^2k_h^2) - c^2\beta^2k_y^2/(g^2k_h^2) -$$
$$- c^2 f\beta k_y\,k_z/(g^2k_h^2)$$

$$C = -\gamma Hk_z[1 - \omega\beta k_x/(gk_h^2)] + \gamma f\beta k_y/(2gk_h^2) -$$
$$- \gamma Hk_x[1 - \gamma(\omega^2 - f^2)/(2c^2k_h^2) - \omega\beta k_x/(gk_h^2)]\tan\theta$$

y $\quad D = 1 + 4\omega^2\Omega^2/(g^2k_h^2) - 2\omega\beta k_x/(gk_h^2) - \omega^4/(g^2k_h^2)$

El modelo HTS se enfoca en ondas gravitatorias de relativamente corta longitud de onda horizontal, donde la aproximación a la onda plana es adecuada. Para ondas de escala global como las mareas, las soluciones de las ecuaciones de onda son funciones de Hough (ver por ejemplo, Chapman y Lindzen [1970]). Tarasick y Shepherd [1992b] sugieren la necesidad de ampliar el modelo para estas ondas. Sin embargo, es posible mantener los resultados de este modelo con respecto a λ_z, usando (5.12) y haciendo las siguiente aproximación:

Consideremos el caso particular de la componente semidiurna de la marea solar. Si se observa en un solo punto del cielo, se puede tomar un punto de vista local, asumiendo que la superposición de los modos de Hough correspondientes a esta componente se aproxime a una onda plana con periodo de 12 horas, sin propagación meridional, y con longitud de onda zonal $\lambda_x = \pi R_t \cos\varphi$ donde R_t es el radio terrestre, y así determinar la longitud de onda vertical de esta onda.

De la relación (5.12) se puede concluir que, al haber incluido las fuerzas de Coriolis y para el caso de la marea semidiurna, la aproximación (5.3) para el parámetro ν sigue siendo válida, por lo cual se puede seguir usando la fórmula (5.4) ó (5.6) para determinar λ_z (Esto se verifica usando los siguientes valores en (5.12). La frecuencia angular es $\omega = 2\Omega = 2\pi/43200s \cong 1.5\times10^{-4}$ rad/s. Los parámetros de Coriolis f y β dependen de la latitud según (5.9) y no son mayores que ω. Para mediciones cenitales $\theta = 0$. Por no propagarse la onda meridionalmente, $k_y = 0$).