

UN MÉTODO NUMÉRICO ACELERADO DE ALTA PRECISIÓN PARA EL SCATTERING DE SUPERFICIES DE MEDIOS NATURALES

Martín Maas[†], Oscar Bruno*, Agustín Fernández Lado[‡], Francisco Grings[†] y Matías Barber[†]

[†]Instituto de Astronomía y Física del Espacio (IAFE) - UBA- CONICET mdmaas@iafe.uba.ar, www.iafe.uba.ar/tele

[‡]Departamento de Matemática, FCEyN (UBA)

*California Institute of Technology, obruno@caltech.edu

Resumen: El scattering electromagnético de superficies es un problema que aparece en numerosas aplicaciones, como por ejemplo la observación del medio terrestre mediante un radar de apertura sintética (SAR) como se propone la misión SAOCOM de la CONAE. El scattering de superficies de medios naturales - modeladas como procesos aleatorios - viene siendo estudiado hace tiempo, pero las metodologías empleadas siguen teniendo importantes limitaciones. Estudiaremos el caso 2D donde las ecuaciones a resolver son las de Helmholtz. Para ello, introducimos una condición de borde periódica, que mediante el uso de cuadraturas especializadas y funciones de truncamiento suaves conducirá a un método de Nyström de orden alto, y así mismo extenderemos al caso periódico un esquema de aceleración basado en FFTs, propuesto originalmente para superficies acotadas, que nos permitirá considerar períodos muy grandes en tiempos computacionales reducidos. Presentamos un análisis del método propuesto, junto con una evaluación de la eficiencia computacional y algunos resultados numéricos para ciertas configuraciones de interés en las aplicaciones.

Palabras clave: *scattering, métodos numéricos, ecuaciones integrales, plan espacial, SAR*

2000 AMS Subject Classification: 21A54 - 55P54

1. INTRODUCCIÓN

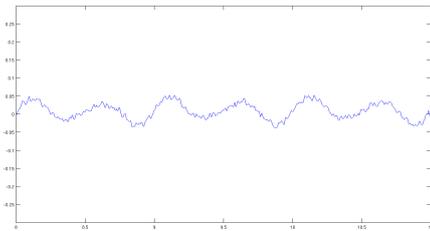
Los problemas de scattering electromagnético de una superficie en 2 dimensiones se pueden modelar con las ecuaciones de Helmholtz, donde la condición de borde en la superficie depende de las propiedades del material y de la onda incidente. Para resolverlos suelen utilizarse métodos numéricos basados en ecuaciones integrales, para lo cual existen distintas formulaciones, inclusive para un mismo problema. Por ejemplo, para el problema de Dirichlet podemos resolver [5]:

$$\frac{1}{2}\mu(x) + \int_S \frac{i}{4} \frac{\partial H_0^1(u(x, x'))}{\partial n(x)} \mu(x') dS(x') = \frac{\partial \phi_{inc}(x)}{\partial n} \quad (1)$$

$$\int_S \frac{i}{4} H_0^1(u(x, x')) \mu(x') dS(x') = \phi_{inc}(x) \quad (2)$$

donde $u(x, x') = k\sqrt{(x - x')^2 + (f(x) - f(x'))^2}$, y H_0^1 es la función de Hankel de tipo 1 y orden 0.

Las superficies f que nos interesan son pseudo-periódicas, es decir, están compuesta de una frecuencia central, otras más bajas y más altas que corresponden a perturbaciones y micro-rugosidad aleatoria de alta frecuencia pero poca altura.



perfil 2D simulado



suelo sembrado con papa

Para poder comprender los pesos relativos de estas características en diferentes longitudes de onda y condiciones de borde, precisamos de un método numérico eficiente en distintas condiciones.

Reducción a un intervalo Si la onda incidente es una onda plana $e^{ik\alpha\bar{r}}$, con $\alpha = (\sin\theta, -\cos\theta)$ y θ el ángulo de incidencia de la onda, tanto esta como el campo reflejado serán α -cuasi-periódicas [4], ($f(x+L) = e^{iL\alpha}f(x)$), lo que nos permite llevar el problema a un único intervalo de periodicidad:

$$\int_{x-\frac{L}{2}}^{x+\frac{L}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha nL} K(u(x, x' - nL)) \right) \mu(x') \sqrt{1 + [f'(x')]^2} dx' = f(x) \quad (3)$$

Con $u(x, x') = \sqrt{(x - x')^2 + (f(x) - f(x'))^2}$, y donde K es es la función de Green de la ecuacion de Helmholtz o alguna de sus derivadas normales evaluadas en la superficie.

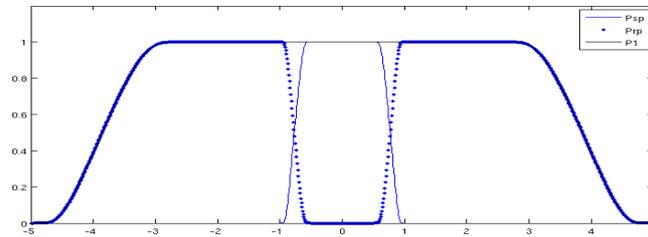
2. PARTICIONES SUAVES DE LA UNIDAD Y CUADRATURAS ESPECIALIZADAS

A la integral impropia de (1) es necesario truncarla. Consideremos la función de truncamiento

$$S(x, x_0, x_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq x_0, \\ \exp\left(\frac{2e^{-1/u}}{u-1}\right) & \text{si } x_0 < |x| < x_1, \quad u = \frac{|x|-x_0}{x_1-x_0}, \\ 0 & \text{si } |x| \geq x_1, \end{cases}$$

Observamos que la función S se anula en los bordes, junto con sus infinitas derivadas. Puede demostrarse que el truncamiento suave de la integral impropia, a diferencia del truncamiento que corresponde a tomar finitos términos de la serie que aparece en (3), converge de manera super-algebraica con A [5], donde A es la longitud del intervalo considerado.

Concentremonos ahora en cómo resolver la ecuación integral. Desarrollaremos un método de Nyström, que consiste en aproximar los operadores integrales con reglas de cuadratura. Puede verse en [1] que el orden de convergencia de la cuadratura se traslada al de la solución. En primer lugar, tomamos el truncamiento suave descrito anteriormente y que llamaremos P_1 . Luego dividimos la integral resultante en dos partes con otra partición de la unidad, para confinar la singularidad de la función de Green a un intervalo del período de la superficie, y allí podremos aplicar dos reglas de cuadratura de convergencia super-algebraica.



Truncamiento suave y particiones de la unidad

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} K(ku(x, x'))\mu(x')dx' &\approx \int_{-A}^A P_1(x')K(ku(x, x'))\mu(x')dx' \\ &= \int_{-A}^A P_{rp}(x-x')K(ku(x, x'))\mu(x')dx' \\ &+ \int_{-A_{sp}}^{A_{sp}} P_{sp}(x-x')K(ku(x, x'))\mu(x')dx' \end{aligned}$$

Usando propiedades de las funciones de Bessel, puede verse que la parte del núcleo que contiene la singularidad se puede escribir en la forma

$$K(t, \tau) = K_1(t, \tau) \ln\left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right) + K_2(t, \tau)$$

Teorema 1 (Regla de trapecios) dada una función C_{per}^∞ , la regla de trapecios converge a la integral de f de manera super-algebraica.

Teorema 2 (Cuadratura de Martensen-Kussmaul) Si tenemos $f \in C_{per}^\infty$, y aproximamos la siguiente integral

$$\int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) f(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t) f(t_j), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

con los pesos de la cuadratura dados por

$$R_j^{(n)}(t) := -\frac{2\pi}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos(m(t - t_j)) - \frac{\pi}{n^2} \cos(n(t - t_j)), \quad j = 0, 1, \dots, 2n - 1$$

obtenemos una convergencia super-algebraica.

3. ACELERACIÓN CON FUENTES EQUIVALENTES EN CARAS PARALELAS

Para períodos grandes o que requieren una discretización muy fina es indispensable poder usar algún esquema de 'aceleración' de los propuestos en la literatura. Uno de los más populares, el Fast Multipole Method [6] requiere solo $n \log(n)$ operaciones, pero tiene el inconveniente de ser inestable a bajas frecuencias [7] es decir con la presencia de micro-rugosidad, un caso de gran interés para nosotros. A su vez, otra familia de métodos basados en FFT, [8], no presenta este inconveniente pero el número de operaciones asciende a $n^{\frac{3}{2}} \log(n)$. Seguiremos el método descrito en [2] y [3], que es un método estable basado en FFTs y que reduce el número de operaciones de a $n^{\frac{6}{5}} \log(n)$. Al mismo tiempo, adaptaremos este método al caso de una superficie periódica, cuestión que no había sido abordada hasta el momento.

Es posible tener una representación aproximada de la forma

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left(H_0^1(k|x - y|) \mu(y) + \frac{\partial}{\partial \hat{n}} H_0^1(k|x - y|) \nu(y) \right) d\Gamma(y)$$

Teorema 3 Dada una curva Γ no necesariamente cerrada, y un dominio S_a cerrado que contiene a Γ , las combinaciones lineales de potenciales single y double-layer de funciones μ y ν definidos en Γ son densos en $L^2(S_a)$

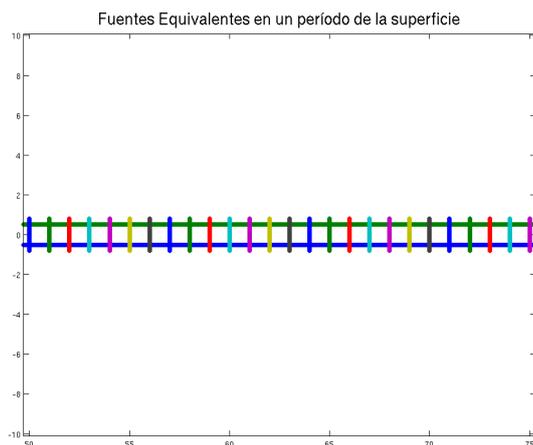
Para trabajar numéricamente hace falta discretizar estas densidades μ y ν , y calcular sus valores para una configuración dada. Esto se realizará mediante un ajuste por cuadrados mínimos del campo real en S_a con el generado por fuentes en Γ .

Interacciones en grillas verticales y horizontales Esta representación nos permitirá calcular las interacciones lejanas a partir de fuentes equivalentes definidas en una grilla Cartesiana. La ventaja es que las integrales que teníamos se convierten en convoluciones, que pueden calcularse eficientemente con la Transformada Rápida de Fourier (FFT). Posteriormente habrá que corregir las interacciones cercanas (que no estaban dentro del rango de validez de la aproximación antes mencionada), lo que también puede realizarse con FFTs.

La aceleración en el caso periódico En principio, dada la α -cuasi-periodicidad de la solución, habrá que considerar un sistema de fuentes equivalentes α -cuasi-periódicas, en un período de la superficie.

Es decir, calculamos para cada caja las fuentes equivalentes correspondientes, pero al sumarlas aplicamos la α -cuasi-periodicidad. La integral en todo el espacio resulta

$$\int_{\Pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{-inL\alpha} K(x, x' + nL)) \xi(x, x) dx'$$



Sistema de fuentes equivalentes α -cuasiperiódicas para un intervalo

Lo que equivale a la convolución del núcleo de Green periódico en la grilla Π con las fuentes equivalentes. Si utilizamos la aproximación mediante el truncamiento suave de este núcleo, tendremos

$$K_A * \xi \rightarrow K_{per} * \xi$$

Luego alcanzará con calcular mediante FFTs, la convolución $K_A * \xi$ para algún A suficientemente grande.

Reconstrucción en la superficie Finalmente, nos interesa calcular la contribución de los numerosos puntos lejanos en cada punto de un período de la superficie. Para ello, hay que reconstruir el campo cercano, a partir del campo en las grillas horizontales y verticales (Π^1 y Π^2). Esto es un problema de Dirichlet para un rectángulo, y lo resolvemos con la expansión de ondas planas donde los pesos se ajustan por cuadrados mínimos

$$\sum_{i=0}^n w_i \cdot e^{ik(x \cdot \sin(\theta_i) + y \cdot \cos(\theta_i))}$$

3.1. APLICACIONES

Con el método descrito se están comenzando a analizar el efecto de filas de cultivo en el scattering de superficies agrícolas y oceánicas. Por ejemplo, la misión SAOCOM planea estimar la constante dieléctrica del suelo, para lo cual es necesario desacoplar en la señal recibida todos los efectos geométricos. También es de interés aprovechar estos efectos para detectar ciertos tipos de superficies, como por ejemplo los surcos muy pronunciados de los sembrados de papa, de importante interés fiscal dado el elevado valor por hectárea.

REFERENCIAS

- [1] R. Kress *Linear Integral Equations, second edition* Applied Mathematical Sciences vol 82. Springer. 1999.
- [2] O. Bruno, L. Kunyansky *A Fast, High-Order Algorithm for the Solution of Surface Scattering Problems: Basic Implementation, Tests, and Applications* J of Computational Physics, 169, 80-110 (2001)
- [3] O. Bruno, L. Kunyansky *A Fast, High-Order Algorithm for the Solution of Surface Scattering Problems II: Theoretical Considerations* Inédito
- [4] D. Maystre et al. *Progress in optics, Volume XXI. Edited by E. Wolf* North-Holland physics publishing. 1983.
- [5] Jr. John A. Monro: *A Super-Algebraically Convergent, Windowing-Based Approach to the Evaluation of Scattering from Periodic Rough Surfaces*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2007.
- [6] R. Coifman, V.Rokhlin, S. Wandzura *The fast multipole method for the wave equation: A pedestrian prescription*. IEEE Antennas Propag Mag 35, 7 (1993).
- [7] B. Dembart, E. Yip. *The accuracy of fast multipole methods for Maxwell's equations* IEEE Comput Sci Eng. 4, 48 (1998)
- [8] M.F. Catedra, E. Cago, L. Nuno *A numerical scheme to obtain the RCS of three-dimensional bodies of resonant size using the conjugate gradient method and the fast fourier transform* IEEE Trans Antennas Propag. 37 528 (1989).