# Problemas
## Método Variacional §

1. **Teorema Variacional**
   (a) Demostrar el *teorema variacional*
   (b) Demostrar que si $\langle\Psi|\Psi_g\rangle = 0$ ($\Psi$ está normalizada), entonces $\langle\Psi|H|\Psi\rangle \geq E_1$, donde $E_1$ es el primer estado excitado.
   (c) ¿Qué dice el principio variacional respecto a la corrección de la energía del estado fundamental en primer orden de teoría de perturbaciones?
   (d) ¿Qué pasa entonces con la corrección en segundo orden?

2. **$\delta$ Delta de Dirac**
   Aplicar el método variacional para resolver el problema de un potencial $\delta$ de Dirac.
   (a) Utilizar como función prueba una Gaussiana $\Psi = Ae^{-ax^2}$
   (b) Utilizar un triángulo de ancho $a$ ($a$ será el parámetro de variación)

3. **Pozo infinito**
   Calcular un límite superior para la energía del estado fundamental de un pozo infinito utilizando una función triangular. ¿Podría usar una Gaussiana en este problema?

4. **Oscilador armónico**
   (a) Encontrar la mejor función de la forma $\Psi(x) = e^{-ax^2}$ para el estado fundamental del oscilador armónico unidimensional.
   Ayuda: $\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^n dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$
   (b) Encontrar el parámetro que minimice la función $\Psi_\beta(x) = xe^{-\beta x^2}$ . Explicar los resultados
   (c) Aproximar el estado fundamental del oscilador armónico unidimensional variando la función $\Psi(x) = \frac{A}{x^2+b^2}$

5. **Atomo de Hidrógeno**
   (a) Utilizar la función de prueba siguiente
   $$\psi_\alpha \begin{cases} C(1-\frac{r}{\alpha}) & r \leq \alpha \\ 0 & r > \alpha \end{cases}$$
   para encontrar el estado fundamental del átomo de hidrógeno. Comparar los resultados con los exactos.
   (b) Repetir el problema con una función de prueba
   $$\psi_\beta = Ne^{-\beta r^2}$$

6. **Oscilador anharmónico** Considerar un potencial unidimensional de la forma
   $$V(x) = \lambda x^4.$$
   Utilizar la funcíon variacional
   $$\Psi = (\frac{2\alpha}{\pi})^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha x^2},$$
   y comparar la mejor energía obtenida para el estado fundamental con el resultado exacto ($E_0 = 1.06\ \frac{\hbar^2}{2m} k^{\frac{1}{3}}$, donde $k = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}$).

§ http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/variational

7. **Método Variacional Lineal**
Aplicar el método variacional al problema de un electrón en una caja, de 2 a.u. de ancho, en una dimensión. Se desea construir una función variacional

$$u = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x),$$

donde

$$f_1(x) = (1 - x^2) \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = (1 - x^4)$$

(a) Calcular la energía que se obtiene aplicando el método variacional lineal
(b) Calcular los coeficientes $c_1$ y $c_2$ que dan la mejor energía posible
(c) Dibujar la función de onda resultante y comparar los resultados obtenidos en este ejercicio con los exactos.