Problemas
Suma de Momentos Angulares [§]

1. **Suma de momentos angulares**
Construir un set completo de autofunciones de J^2 y J_z para 2 partículas independientes de spin 1/2, utilizando productos del tipo $|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$. Por convención $|J=1, M=1\rangle = |j_1 = \frac{1}{2}, m_1 = \frac{1}{2}\rangle |j_2 = \frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{2}\rangle$.

2. **Representaciones acopladas**
Encontrar los estados posibles que se pueden construir con productos de funciones del tipo $|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$ cuando $j_1 = 1$ y $j_2 = 1$

3. **Coeficientes de Clebsch-Gordan**
Encontrar los kets correspondientes a
   (a) $|J=0, M=0\rangle$, cuando $j_1 = 1$ y $j_2 = 1$
   (b) $|J=2, M=0\rangle$, cuando $j_1 = 1$ y $j_2 = 1$
   (c) $|J=\frac{3}{2}, M=\frac{1}{2}\rangle$, cuando $j_1 = 1$ y $j_2 = \frac{1}{2}$
   (d) $|J=\frac{3}{2}, M=-\frac{1}{2}\rangle$, cuando $j_1 = 1$ y $j_2 = \frac{1}{2}$
   (e) $|J=\frac{1}{2}, M=-\frac{1}{2}\rangle$, cuando $j_1 = 1$ y $j_2 = \frac{1}{2}$

4. **Acoplamiento con spin s=1/2**
La forma general de acoplamiento en la cual el segundo momento angular es el spin ($j_2 = s = 1/2$), es

$$\begin{aligned}\phi_{(j_1=j+\frac{1}{2})s;jm} &= -\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}}\psi_{j_1(m-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}}\psi_{j_1(m+\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\\ \phi_{(j_1=j-\frac{1}{2})s;jm} &= \sqrt{\frac{j+m}{2j}}\psi_{j_1(m-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sqrt{\frac{j-m}{2j}}\psi_{j_1(m+\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Construir un estado correspondiente a $J = M = l + \frac{1}{2}$. ¿Cuál es la probabilidad de que el spin esté orientado hacia arriba?

5. Escribir la matriz S_x para $S = 3/2$ en la base de S_z. Encontrar los autovalores.

6. El Hamiltoniano de un rotor rígido es

$$H = \frac{\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2}{2I_1^2} + \frac{\hat{L}_z^2}{2I_2^2}$$

La partícula se encuentra en un estado con $l = 1$. Encontrar las energías y los autoestados del sistema

7. Un núcleo asimétrico tiene un Hamiltoniano dado por

$$H = \frac{\omega_0}{\hbar}(\hat{L}^2 - \frac{1}{2}\hat{L}_z^2)$$

Elegir un conjunto completo de observables que conmuten y escribir la matriz de H para $l = 0, 1$. Dibujar el espectro (incluyendo la degeneración)

8. Sea una partícula en un estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|11\rangle + i\sqrt{2}|10\rangle - |1-1\rangle$$

donde $|lm\rangle$ son autoestados de L^2 y L_z.

[§] http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/sumamomento

(a) Calcular $L^2|\psi\rangle$ y $L_y|\psi\rangle$

(b) Se mide $L_n|\psi\rangle$ y se obtiene $+\hbar$ ($\hat{n} = (\theta = \pi/2, \phi)$). En qué estado está despues de la medición?

(c) Qué probabilidad hay de obtener $+\hbar$ en una medición de L_z, posterior a la anterior?

9. El Hamiltoniano de un sistema electrón-positrón en presencia de un campo magnético uniforme en dirección $\hat{z}$ es

$$H = AS^{(e^-)} \cdot S^{(e^+)} + \frac{eB}{mc}(S_z^{(e^-)} + S_z^{(e^+)})$$

Suponer que la función de spin del sistema está dada por $|\chi\rangle = |\chi_+^{(e^-)}\rangle|\chi_-^{(e^+)}\rangle$.

(a) Suponer que $A \to 0$. ¿Es $|\chi\rangle$ un autovector de H?

(b) Calcular $\langle H\rangle$

(c) Repetir el problema, pero ahora $B \to 0$ (A no).

10. **Rotación de Armónicos Esféricos**
Supongamos que el estado $|l = 2, m = 0\rangle$ es rotado un ángulo β alrededor del eje y. Encontrar la probabilidad de que el nuevo estado se encuentre en los distintos $|lm\rangle$.

11. Sea una partícula con $S = 3/2$ y sea ψ una función

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle + |\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle - |\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\rangle - \sqrt{3}|\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\rangle)$$

(a) Verificar que ψ es autovector de S_x con autovalor $\hbar/2$

(b) Qué valores se obtienen al medir S_z y con qué probabilidad?

(c) Aplicar un operador de rotación y construir Φ tal que sea autovector de S_y con autovalor $+\hbar/2$. Comprobar que es autovector.

12. Sea $\hat{n}$ un vector unidad especificado por θ y ϕ Mostrar que

$$L_n = \frac{1}{2}\sin\theta(e^{-i\phi}L_+ + e^{i\phi}L_-) + \cos\theta L_z$$

13. **Decaimientos**
La partícula X se forma en la colisión $A + B \to X$, y luego decae según la reacción $X \to C + D$. Los espines de A, B, C y D son cero. Elijamos como referencia el sistema centro de masa de AB, y llamemos z a la dirección de los haces colisionantes A y B, z' a la dirección de un eje que forma un ángulo θ con z, y $|CD, z'\rangle$ al ket que describe las partículas C y D moviéndose como ondas planas en sentidos opuestos según la dirección z'. Se desea calcular la distribución angular con la que es emitida C. Para ello, utilizando conservación del impulso angular, muestre que:

(a) el espín s de X es necesariamente entero, y X se produce en el estado $|s, 0\rangle$.

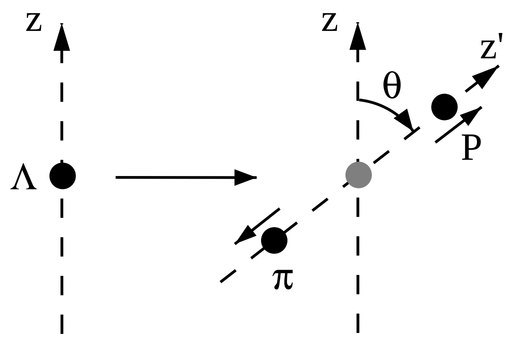
(b) el ket $|s, 0\rangle_z$ autoestado de $\{J^2, J_z\}$ se puede desarrollar en la base $|s, m\rangle_{z'}$ de autoestados de $\{J^2, J_{z'}\}$, de la forma $|s, 0\rangle_z = \sum_{m=-s}^{s} c_m|s, m\rangle_{z'}$ con $c_m = d^s_{m0}(\theta)$.

(c) el elemento de matriz $a = \langle CD, z'|U_T|s, 0\rangle_{z'}$ es independiente de θ, la dirección de z'.

(d) la amplitud del proceso de decaimiento es $\langle CD, z'|U_T|s,0\rangle_z = a\, d^s_{00}(\theta)$.

Dibuje a mano alzada la distribución en θ de C. Note que el número de mínimos es justamente s. Así, la medición de la distribución angular de C permite inferir el valor del espín de X.

14. La partícula Λ^0 (espín 1/2) se desintegra en un protón (espín 1/2) y un mesón π^- (espín 0) mediante una interacción débil. Inicialmente Λ^0 tiene $S_z = \hbar/2$, y las partículas producto de la desintegración salen formando un ángulo θ con el eje z (ver figura).



(a) Usando la conservación del impulso angular total, diga que valores de S_z del protón se pueden medir luego de la desintegración, cuando $\theta = 0$.

(b) Para un valor arbitrario de θ, calcule la probabilidad de medir $S_{z'} = \hbar/2$ y $S_{z'} = -\hbar/2$ para la partícula Λ^0 respecto al eje z'.

(c) Suponga que la probabilidad de que Λ^0 con $S_z = \hbar/2$ se desintegre en un protón emitido en la dirección $+z$ está dada por a_+, mientras que a_- corresponde a la probabilidad del decaimiento en el caso $S_z = -\hbar/2$. Usando (b) escriba la probabilidad de que luego del decaimiento el protón salga formando un ángulo θ con el eje z. ¿Qué ocurre si $a_+ = a_-$? Interprete.

(d) Experimentalmente la probabilidad de que el protón salga formando un ángulo θ con el eje z está dada por

$$P(\theta) \approx C(1 - 0{,}62\cos\theta)$$

Obtenga a_+ y a_-. Interprete.

15. **Problemas auxiliares**

(a) Considerar un sistema de dos partículas de spin 1/2. El observador A se especializa en medir los componentes de spin de una partícula, mientras el observador B mide los de la otra. El sistema se encuentra inicialmente en un estado singlete de spin.

i. Calcular la probabilidad que tiene el observador A de medir $s_{1z} = \hbar/2$ mientras el observador B no realiza ninguna medición

ii. Calcular la probabilidad que tiene el observador A de medir $s_{1x} = \hbar/2$ mientras el observador B no realiza ninguna medición

iii. El observador B determina que el spin de la partícula 2 es $s_{2z} = \hbar/2$. Calcular el valor que mide A de s_{1z}

iv. El observador B determina que el spin de la partícula 2 es $s_{2z} = \hbar/2$. Calcular la probabilidad que tiene el observador A de medir $s_{1x} = \hbar/2$. ¿Influye el hecho que B mida el spin en la dirección z?

(b) Considerar el esado $|j_1 j_2 j m\rangle$, que es autoestado de $\hat{J}_1^2$, $\hat{J}_2^2$, $\hat{J}^2$ y $\hat{J}_z$.

i. Mostrar que este también es un autoestado de $\hat{J}_1 \cdot \hat{J}_2$

ii. Mostrar que $\hat{J}_1 \cdot \hat{J}_2$ conmuta con $\hat{J}_\pm$. Esto explica por qué sus autovalores no dependen de m.

iii. Repetir el ejercicio para $\hat{J} \cdot \hat{J}_1$ y $\hat{J} \cdot \hat{J}_2$

(c) Un sistema de dos partículas cuyos spines son $s_1 = \frac{3}{2}$ y $s_2 = \frac{1}{2}$ se describe por el Hamiltoniano aproximado $\hat{H} = \alpha \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2$, donde α es una constante dada. El sistema está inicialmente (a $t = 0$) en el estado $|S_1 = \frac{3}{2}, S_2 = \frac{1}{2}; S_{1z} = \frac{1}{2}, S_{2z} = \frac{1}{2}\rangle$. Calcular la probabilidad de encontrar el estado $|\frac{3}{2}\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle$ en un tiempo posterior t.
Respuesta: $P = \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha t$

(d) Considerar un sistema de 3 electrones.

i. Encontrar un conjunto de autofunciones del spin total y su proyección en z.
Ayuda: Considerar al electrón 1 y 2 como un subsistema S_{12} y luego acoplarlo con S_3.

ii. Ignorando los grados de libertad espaciales, el Hamiltoniano aproximado del sistema es

$$\hat{H} = \alpha \left(S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{2x}S_{3x} + S_{2y}S_{3y} + S_{1x}S_{3x} + S_{1y}S_{3y} \right) \ .$$

Graficar el espectro
Respuesta: los distintos autovalores (degenerados) que aparecen son $E = 0$, $E = \alpha\hbar^2$ y $E = -\frac{1}{2}\alpha\hbar^2$

16. **Coeficientes de Clebsch–Gordan y las matrices de rotación**

(a) Demostrar que

$$\int d\Omega Y_l^{m^*}(\theta,\phi) Y_{l_1}^{m_1}(\theta,\phi) Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l+1)}} \langle l_1 l_2; 00 | l_1 l_2; l0\rangle \langle l_1 l_2; m_1 m_2 | l_1 l_2; lm\rangle$$

(b) Utilizando la fórmula anterior, rehacer el ejercicio en que se pedía identificar elementos de matriz nulos, pero realizando ahora el cálculo explícito de ellos