# Problemas
## Simetrías Discretas [§]

1. Sea $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ el operador de traslación con vector despazamiento $\mathbf{d}$, $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$ el operador de rotación ($\hat{\mathbf{n}}$ y $\phi$ son respectivamente el eje y el ángulo de rotación), y $\Pi$ el operador de paridad. ¿Cuáles de los siguientes pares de operadores conmutan? ¿Por qué?
   (a) $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ y $\mathcal{T}_{\mathbf{d}'}$ ($\mathbf{d}$ y $\mathbf{d}'$ en distintas direcciones).
   (b) $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$ y $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}', \phi')$ ($\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{n}}'$ en distintas direcciones).
   (c) $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ y $\Pi$.
   (d) $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$ y $\Pi$.

2. Señalar de las siguientes expresiones cuales son verdaderas y cuales falsas
   (a) Si el Hamiltoniano es invariante rotacional, necesariamente $[\hat{J}, \hat{H}] = 0$ y $[\hat{J}^2, \hat{H}] = 0$
   (b) Si el Hamiltoniano es invariante rotacional, todos los estados de la forma $\mathcal{D}(R)|n; jm\rangle$ tienen la misma energía
   (c) Si el Hamiltoniano es invariante rotacional, todos los estados de la forma $|n; jm\rangle$ tienen la misma energía, independientemente del valor de $m$
   (d) El Hamiltoniano cuyo potencial es $V(r) + \alpha\hat{L} \cdot \hat{S}$ tiene una degeneración $(2j + 1)$ en cada nivel, debido al punto anterior.
   (e) El operador momento dipolar eléctrico tiene paridad par
   (f) El conmutador $[\hat{x}, \Pi] = 0$
   (g) El anticonmutador $\left\{\hat{L}, \Pi\right\} = 0$
   (h) El conmutador $[\hat{J}, \Pi] = 0$
   (i) $\Pi^\dagger \hat{J} \Pi = \hat{J}$
   (j) Si $[\Pi, \hat{H}] = 0$, un vector con paridad definida a $t = 0$ mantiene su paridad a todo $t$
   (k) $\Pi^{-1}\hat{S} \cdot \hat{x}\Pi = -\hat{S} \cdot \hat{x}$
   (l) $\Pi^{-1}\hat{S} \cdot \hat{L}\Pi = -\hat{S} \cdot \hat{L}$
   (m) Si un Hamiltoniano es invariante ante inversiones espaciales, los estados estacionarios no tienen momento dipolar permanente
   (n) Puede existir un estado del átomo de Hidrógeno con $n = 2$ que tenga momento dipolar permanente

3. En la clase vimos que operando $\hat{T}[\hat{r}, \hat{p}]\hat{T}^{-1}$ nos lleva a que $\hat{T}i\hat{T}^{-1} = -i$, y por lo tanto $\hat{T}$ debe ser antilineal. Llegar a la misma conclusión con las relaciones de conmutación entre las componentes de $\hat{J}$ y entre las componentes de $\hat{p}$ y $\hat{J}$.

4. Considerar un sistema que a $t = 0$ se encuentra en el estado $|\alpha\rangle$. A tiempo $t = 0$ se le aplica un operador de reversión temporal $\hat{T}$ y se lo deja evolucionar hasta un tiempo infinitesimal $\delta t$.
   (a) Si el movimiento es simétrico bajo inversión temporal, ¿cómo debería plantearse la equivalencia si intercambiamos el orden de las operaciones?

[§] http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/simietrias

(b) Expresar las operaciones de traslación temporal infinitesimal en forma matemática y llegar a las relaciones de conmutación pertinentes.

(c) Elaborar un argumento adicional acerca del por qué el operador $\hat{T}$ debe ser antilineal

5. Demostrar que si un operador antilineal $\hat{\theta} = \hat{Y}\hat{K}$ donde $\hat{K}$ es el operador conjugación compleja, entonces $\hat{Y}$ debe ser lineal.

6. Demostrar que si un operador antilineal $\hat{\theta} = \hat{U}\hat{K}$ donde $\hat{U}$ es un operador unitario y $\hat{K}$ es el operador conjugación compleja, entonces si $|\bar{\alpha}\rangle = \hat{\theta}|\alpha\rangle$ y $|\bar{\beta}\rangle = \hat{\theta}|\beta\rangle$, entonces $\langle\bar{\beta}|\bar{\alpha}\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle$

7. Evalúe los siguientes elementos de matriz. Si alguno se anula, explique por qué usando argumentos de simetría.

   (a) $\langle n = 2, l = 1, m = 0|x|n = 2, l = 0, m = 0\rangle$.

   (b) $\langle n = 2, l = 1, m = 0|p_z|n = 2, l = 0, m = 0\rangle$.

   (c) $\langle L_z\rangle$ para un electrón en un campo central con $j = 9/2$, $m = 7/2$, y $l = 4$.

   En (a) y (b), $|nlm\rangle$ son los autoestados de energía del átomo de hidrógeno ignorando los efectos de spín.

8. (a) Sea $\phi(x, t)$ la función de onda de una partícula sin espín correspondiente a una onda plana en tres dimensiones. Muestre que $\phi^*(x, -t)$ es la función de onda de una onda plana con la dirección del momento invertida .

   (b) Sea $\chi(\hat{\mathbf{n}})$ el auto-spinor de dos componentes de $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ con autovalor $+1$. Utilizando la forma explícita de $\chi(\hat{\mathbf{n}})$ en términos de los ángulos polares y azimutales $\alpha$ y $\beta$ que caracterizan a $\hat{\mathbf{n}}$, verifique que $-i\sigma_y\chi^*(\hat{\mathbf{n}})$ es el auto-spinor con la dirección de spín invertida.

9. (a) Asumiendo que el hamiltoniano es invariante ante inversión temporal, pruebe que la función de onda para un sistema no degenerado sin espín, puede ser elegida real en cada instante de tiempo.

   (b) La función de onda para un estado de onda plana está dada en $t = 0$ por la función compleja $e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}$. ¿Por qué esto no viola la invariancia de inversión temporal?

10. Sea $\phi(\mathbf{p}') = \langle\mathbf{p}'|\alpha\rangle$ la función de onda en representación de momentos del estado $|\alpha\rangle$. La función de onda en representación de momentos del estado $\Theta\,|\alpha\rangle$ (donde $\Theta$ es el operador de inversión temporal), ¿está dada por $\phi(\mathbf{p}')$, $\phi(-\mathbf{p}')$, $\phi^*(\mathbf{p}')$, o por $\phi^*(-\mathbf{p}')$? Justifique.

11. Se sabe que un estado cuántico $|\Phi\rangle$ es simultáneamente autoestado de dos operadores hermíticos $A$ y $B$ que anticonmutan. ¿Qué puede decir sobre los correspondientes autovalores de $A$ y $B$ para este estado? Ilustre el resultado usando el operador paridad y el operador de momentos (utilice que $\Pi = \Pi^{-1} = \Pi^\dagger$).

12. Considere dos autoestados del operador paridad

$$\Pi\,|\alpha\rangle = \epsilon_\alpha\,|\alpha\rangle \qquad \Pi\,|\beta\rangle = \epsilon_\beta\,|\beta\rangle\ ,$$

donde los autovalores $\epsilon_\alpha$ y $\epsilon_\beta$ pueden ser 1 o $-1$. Muestre que

$$\langle\beta|\mathbf{x}|\alpha\rangle = 0$$

salvo si $\epsilon_\alpha = -\epsilon_\beta$. Relacione este resultado con el argumento usual $\int \phi_\beta^* \mathbf{x} \phi_\alpha \mathrm{d}^3\mathbf{x} = 0$ si $\phi_\alpha$ y $\phi_\beta$ tienen la misma paridad (*regla de Laporte*). ¿Qué ocurre con $\langle\beta|\mathbf{p}|\alpha\rangle$? ¿Y con $\langle\beta|\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}|\alpha\rangle$?

13. Considere la función de onda de una partícula sin spín

$$\langle\mathbf{x}|\alpha l m\rangle = R_\alpha(r) Y_l^m(\theta,\phi) \ .$$

¿Qué puede decir del $V(\mathbf{r})$ en que se encuentra la partícula? Usando las expresiones de los armónicos esféricos, muestre que frente a la transformación de paridad $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$, el estado se transforma como

$$\Pi\,|\alpha l m\rangle = (-1)^l\,|\alpha l m\rangle \ .$$

¿Qué puede decir de las propiedades de conmutación de $\Pi$ y $\mathbf{L}$?

14. Una partícula de spin $s = 1/2$ está ligada a un centro fijo por un potencial esféricamente simétrico. Las autofunciones simultáneas de $L^2$, $S^2$, $J^2$ y $J_z$ se pueden escribir:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_l^{j=l\pm1/2,m} &= \pm\sqrt{\frac{l\pm m+1/2}{2l+1}} Y_l^{m-1/2}(\theta,\phi)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l\mp m+1/2}{2l+1}} Y_l^{m+1/2}(\theta,\phi)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\begin{pmatrix}\pm\sqrt{l\pm m+1/2}\,Y_l^{m-1/2}(\theta,\phi)\\ \sqrt{l\mp m+1/2}\,Y_l^{m+1/2}(\theta,\phi)\end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

(a) Escriba la función spín-angular $\mathcal{Y}_{l=0}^{j=1/2,m=1/2}$.

(b) Exprese $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x})\mathcal{Y}_{l=0}^{j=1/2,m=1/2}$ en términos de $\mathcal{Y}_l^{j,m}$.

(c) Muestre que el resultado obtenido en (b) se puede interpretar usando las propiedades de transformación de $\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}$ ante rotaciones e inversión espacial (paridad).

15. En términos de cuales de los $\mathcal{Y}_l^{j,m}$ puede expresarse

$$(S_x y - S_y x)\mathcal{Y}_{l=1}^{j=3/2,m=3/2} \quad ?$$

Ayuda: Puede resultar útil saber que si $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son tensores de rango 1, entonces $\frac{(\mathbf{U}\times\mathbf{V})}{i\sqrt{2}}$ también lo es.

16. Debido a interacciones débiles existentes entre los electrones atómicos y el núcleo, se puede tomar un potencial que viola paridad de la siguiente forma:

$$V = \lambda[\delta^3(\mathbf{x})\mathbf{S}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\delta^3(\mathbf{x})] \ ,$$

donde $\mathbf{S}$ y $\mathbf{p}$ son los operadores de spín y de momento del electrón respectivamente, y se supone que el núcleo está ubicado en el origen de coordenadas. Como resultado, el estado fundamental de un átomo alcalino, usualmente caracterizado por $|n,l,j,m\rangle$, en realidad contiene pequeñas contribuciones provenientes de otros autoestados en la siguiente manera:

$$|n,l,j,m\rangle \to |n,l,j,m\rangle + \sum_{n'l'j'm'} C_{n'l'j'm'}\,|n',l',j',m'\rangle \ .$$

Usando solamente consideraciones de simetría, ¿qué puede decir acerca de los $(n',l',j',m')$ que dan contribuciones no nulas? Suponga que las funciones de onda radiales y los niveles de energía son conocidos. Indique como calcularía los $C_{n'l'j'm'}$. ¿Se obtienen más restricciones acerca de los $(n',l',j',m')$?

17. Sea una partícula sometida a un potencial de oscilador armónico cuyo estado inicial a $t = 0$ es el estado coherente

$$|\beta\rangle = e^{-|\beta|^2/2} \sum_{n=0} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \ ,$$

donde $\beta \in \mathbb{C}$.

(a) Se mide el operador paridad $\Pi$ a $t = 0$ obteniéndose el autovalor $+1$. ¿Cuál es el estado $|\psi\rangle$ del sistema a tiempo $t > 0$?

(b) ¿Qué valores puede tomar a $t > 0$ el operador $H$ y con qué probabilidad? ¿Cuál es el estado a un tiempo posterior? ¿Cuál es el primer estado excitado? ¿Qué resultados posibles daría la medición de $\Pi$?

(c) Si se quisiera medir el operador de aniquilación $a$ en el estado $|\psi\rangle$, ¿qué valores podría obtener?

(d) Calcule el valor medio de los operadores $a$ y $a^\dagger$. ¿Es $|\psi\rangle$ un estado coherente?

18. Muestre que los operadores $P_+ = (1+\Pi)/2$ y $P_- = (1-\Pi)/2$ son proyectores. ¿Qué condición debe cumplir $\psi(r)$ para que $|\psi\rangle$ pertenezca al subespacio invariante de $P_+$ o de $P_-$? ¿Qué quiere decir físicamente que $P_+ + P_- = 1$?

19. Considere un potencial rectangular simétrico dado por

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{para } |x| > a+b \\ 0 & \text{para } a < |x| < a+b \\ V_0 > 0 & \text{para } |x| < a \ . \end{cases}$$

Asumiendo que $V_0$ es mucho mayor que las energías correspondientes a los niveles mas bajos, obtenga una expresión aproximada para la separación en la energía de los dos estados mas bajos. ¿Qué ocurre en el límite $V_0 \to \infty$? ¿Tienen en este caso los autoestados de la energía paridad definida? Justifique.

(a) ¿Cuál es el estado inverso-temporal correspondiente a $\mathcal{D}(R)\,|j,m\rangle$?

(b) Usando las propiedades de inversión temporal y rotaciones, pruebe que

$$\mathcal{D}^{(j)*}_{m',m}(R) = (-1)^{m-m'} \mathcal{D}^{(j)}_{-m',-m}(R) \ .$$

(c) Pruebe que $\Theta\,|j,m\rangle = i^{2m}\,|j,-m\rangle$.

20. Suponga que una partícula sin spín está ligada a un centro fijo por un potencial $V(\mathbf{x})$, tan asimétrico que ningún nivel de energía es degenerado. Usando invariancia ante inversión temporal, pruebe que

$$\langle \mathbf{L} \rangle = 0$$

para cualquier autoestado de energía. Si la función de onda de uno de estos autoestado no degenerados se expande en la forma

$$\sum_l \sum_m F_{lm}(r) Y_l^m(\theta,\phi) \ ,$$

¿qué tipo de restricciones de fase se obtienen para $F_{lm}(r)$?

21. El Hamiltoniano de un sistema de spín 1 está dado por

$$H = AS_z^2 + B(S_x^2 - S_y^2) \ .$$

Resuelva exactamente este problema para encontrar los autoestados normalizados de energía y sus autovalores (un Hamiltoniano dependiente del espín de este tipo aparece en el estudio de cristales). ¿Es este Hamiltoniano invariante ante inversión temporal? ¿Cómo se transforman ante inversión temporal los autoestados normalizados obtenidos?