Problemas
Formalismos de la Física Cuántica (2):
Rotaciones e Impulso angular §

1. **Algebra para espacios de 2 dimensiones**

1. En un espacio vectorial de dimension 2 considere los operadores $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, que en la base ortonormal $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ con

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

se representan mediante las matrices

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Estas tres matrices se conocen como *matrices de Pauli*.

a) Halle sus autovalores y autovectores en esta base.

b) Verifique que se satisfacen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} det(\sigma_k) &= -1 \\ Tr(\sigma_k) &= 0 \\ \sigma_i^2 &= I \\ \sigma_j\sigma_k &= i\epsilon_{jkl}\sigma_l + I\delta_{jk} , \end{aligned}$$

donde I representa a la matriz identidad, ϵ_{ijk} es la densidad tensorial de Levi–Civita, y δ_{ij} es la delta de Kronecker.

2. Suponga una matriz X de 2×2 que se escribe en la forma

$$X = a_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}$$

donde a son números, y $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

1. ¿Cómo se relacionan los a_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ con $\mathrm{Tr}(X)$ y $\mathrm{Tr}\,(\sigma_k X)$?
2. Obtenga a_0 y a_k en término de los elementos de matriz X_{ij}. Muestre que cualquier matriz hermítica X de 2×2 se puede escribir en esta forma.

3. Usando la ortonormalidad de $|+\rangle$ y $|-\rangle$, pruebe que

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar S_k \qquad \{S_i, S_j\} = (\hbar^2/2)\delta_{ij}$$

donde

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\hbar}{2}\left[|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right] \\ S_y &= \frac{i\hbar}{2}\left[-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right] \\ S_z &= \frac{\hbar}{2}\left[|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right] . \end{aligned}$$

4. Construya $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}; +\rangle$ tal que

$$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}; +\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}; +\rangle$$

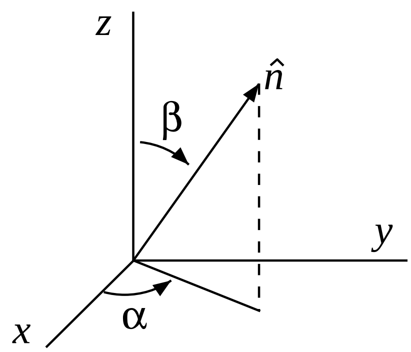

Figure 1: Caracterización de un vector.

donde $\mathbf{\hat{n}}$ está caracterizado por los ángulos que se muestran en la figura. Exprese su respuesta como una combinación lineal de $|+\rangle$ y $|-\rangle$.
[Nota: la respuesta es

$$\cos(\beta/2)\,|+\rangle + \sin(\beta/2)e^{i\alpha}\,|-\rangle \ .$$

En lugar de verificar que esta respuesta satisface la ecuación de autovalores de arriba, considere al problema como un problema de autovalores.]

5. Un sistema de espín 1/2 está en un autoestado de $\mathbf{S}\cdot\mathbf{\hat{n}}$ con autovalor $\hbar/2$, donde $\mathbf{\hat{n}}$ es un vector unitario en el plano xz que forma un ángulo γ con el eje positivo z.
   1. Suponga que se mide S_x. ¿Cuál es la probabilidad de obtener $\hbar/2$?
   2. Evalúe la dispersión de S_x, es decir $\left\langle (S_x - \langle S_x\rangle)^2\right\rangle$. Verifique el resultado para los casos $\gamma = 0, \pi/2, \pi$.
6. Un haz de átomos de espín 1/2 es sometido a una serie de mediciones del tipo Stern-Gerlach en la siguiente manera:
   1- La primera medición acepta átomos con $s_z = \hbar/2$ y rechaza átomos con $s_z = -\hbar/2$.
   2- La segunda medición acepta átomos con $s_n = \hbar/2$ y rechaza con $s_n = -\hbar/2$, donde s_n es el autovalor del operador $\mathbf{S}\cdot\mathbf{\hat{n}}$ con $\mathbf{\hat{n}}$ en el plano xz y formando un ángulo β con el eje z.
   3- Una tercera medición acepta $s_z = -\hbar/2$ y rechaza $s_z = \hbar/2$.

   ¿Cuál es la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$ si el haz $s_z = \hbar/2$ que pasa la primer medición esta normalizado a uno? Como se debe orientar el segundo aparato de medición para maximizar la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$?

2. **Impulso angular**

   1. En la práctica anterior vimos que la base de estados de polarización del fotón $|x'\rangle, |y'\rangle$ no es mas que la base $|x\rangle, |y\rangle$ rotada en un ángulo θ alrededor del eje z. Llamamos $\hat{R}(\theta)$ al operador que realiza esta rotación, y estudiamos sus autovalores y autovectores.
      a) Verificar que los autoestados de $\hat{R}(\theta)$ también son autoestados de $\hat{L}_z$
      b) Mostrar que $\hat{R}(\theta) = \exp(-i\frac{\theta\hat{L}_z}{\hbar})$

§http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/formalismo2

2. Verificar que el operador impulso angular en dirección z es

$$L_z \quad = \quad \hbar \left[|R\rangle \langle R| \, - \, |L\rangle \langle L| \right]$$

a) Escribir su representación matricial en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ y relacionarla con las matrices de Pauli.

b) Usando que $\sigma_y^2 = 1$ (ver propiedades en el problema 1(1)b) mostrar que $\hat{R}(\theta) = \cos(\frac{\theta}{2}) - i\frac{L_z \sin(\frac{\theta}{2})}{\hbar}$

c) Mostrar que $\hat{L}_z$ es hermítico y $\hat{R}(\theta)$ unitario

3. **Mas problemas de álgebra**

1. Suponga que $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ y $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle\}$ son dos bases ortogonales.

a) Considere $|u\rangle = |\alpha\rangle - i\,|\beta\rangle$ y $|v\rangle = i\,|\alpha\rangle + |\beta\rangle$. ¿Cuánto vale $\langle u|v\rangle$? ¿Son ortogonales?

b) Sea $|k\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_{ki}\,|i\rangle$, con $k = \alpha, \beta, \gamma$. ¿Cuánto valen $\langle 2|\beta\rangle$ y $\langle \alpha|3\rangle$?

c) Escriba $|u\rangle$ y $|v\rangle$ en la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ y calcule nuevamente $\langle u|v\rangle$.

2. Usando las reglas del álgebra de bra-ket, pruebe o evalúe los siguientes items:

a) $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$ y $\mathrm{Tr}(XYZ) = \mathrm{Tr}(ZXY)$, donde X,Y y Z son operadores.

b) $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$.

c) Calcule $\exp[i\mathrm{f(A)}]$ en forma de ket-bra, donde A es un operador hermítico cuyos autovalores son conocidos.

3. a) Considere dos kets $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$. Suponga que $\langle a'|\alpha\rangle, \langle a''|\alpha\rangle, \ldots$ y $\langle a'|\beta\rangle, \langle a''|\beta\rangle, \ldots$ son todos conocidos, donde $|a'\rangle, |a''\rangle, \ldots$ forman un conjunto completo de kets base. Encuentre la representación matricial del operador $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en esta base.

b) Considere ahora un sistema de espín 1/2 y sean $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ iguales a $|s_z = \hbar/2\rangle$ y $|s_x = \hbar/2\rangle$ respectivamente. Escriba explicitamente la matriz cuadrada que corresponde a $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en la base usual (s_z diagonal).

4. Suponga que $|i\rangle$ y $|j\rangle$ son autoestados de algún operador hermítico A. ¿Bajo qué condiciones se puede concluir que $|i\rangle + |j\rangle$ también es autoestado de A? Justifique.

5. Considere un espacio de kets generado por los autokets $\{|a'\rangle\}$ de un operador hermítico $\hat{A}$. No hay degeneración.

a) Pruebe que

$$\prod_{a'} (\hat{A} - a')$$

es el operador nulo.

b) ¿Cuál es el significado del operador

$$\prod_{a'' \neq a'} \frac{(\hat{A} - a'')}{(a' - a'')} \quad ?$$

c) Ilustre los dos puntos anteriores usando $\hat{A} = S_z$ de un sistema de espín 1/2.

6. El hamiltoniano de un sistema de dos niveles es

$$H = a\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)$$

donde a es un número con dimensiones de energía. Encuentre los autovalores de energía y los correspondientes autoestados como una combinación lineal de $|1\rangle$ y $|2\rangle$.

7. Un sistema de dos niveles está caracterizado por el hamiltoniano

$$H = H_{11}|1\rangle\langle 1| + H_{22}|2\rangle\langle 2| + H_{12}\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)$$

donde H_{11}, H_{22}, H_{12} son números reales con dimensiones de energía y $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son autoestados de algún observable(distinto de H). Encuentre los autoestados de energía y los correspondientes autovalores. Asegúrese de que su respuesta tenga sentido en el caso $H_{12} = 0$.

8. Un cierto observable en mecánica cuantica tiene una representación matricial de 3×3 como sigue

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los autovectores normalizados de este observable y los correspondientes autovalores. ¿Hay degeneración?
b) De un ejemplo físico donde todo esto sea relevante.

9. Dada la matriz

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

a) Pruebe que J es unitaria y halle J^{-1}.
b) Aplique la transformación $B = JAJ^{-1}$ a una matriz simétrica y verifique que: (i) B es simétrica, (ii) $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.
c) Dada una matriz A simétrica, halle θ de modo que B resulte ser diagonal.