Problemas
Formalismos de la Física Cuántica (1): Conmutadores §

1. Verificar las siguientes propiedades
   (a) $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$
   (b) $[\hat{A}, c] = 0$ $(c \in \mathcal{C})$
   (c) $[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$
   (d) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$
   (e) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} + \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}]$
   (f) $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ (Identidad de Jacobi)
   (g) $[f(\hat{A}), \hat{A}] = 0$
   (h) $[AB, CD] = -AC\{D, B\} + A\{C, B\}D - C\{D, A\}B + \{C, A\}DB$

2. Evaluar los siguientes operadores
   (a) $[\hat{x}, \hat{p_x}]$
   (b) $[\hat{z}, \hat{p_x}]$
   (c) $[\hat{x}, \hat{p_x}^2]$
   (d) $[\hat{x}, G(\hat{p_x})]$; G es una función analítica (Solución: $i\hbar \frac{\partial G}{\partial p_x}$)
   (e) $[\hat{p_x}, F(\hat{x})]$; F es una función analítica (Solución: $-i\hbar \frac{\partial F}{\partial x}$)
   (f) $[\hat{p_x}, \hat{x}^2]$
   (g) $[e^{\hat{p}}, \hat{p}]$
   (h) $[\hat{H}, \hat{x}]$ ($\hat{H}$ es el operador Hamiltoniano en 1 dimensión)
   (i) $[\hat{H}, \hat{p}]$
   (j) $[\hat{x}, \hat{\frac{d}{dx}}]$
   (k) $[\hat{\frac{d}{dx}}, \hat{x}^2]$

3. Sean $\hat{A}$ y $\hat{B}$, dos operadores que conmutan con $[\hat{A}, \hat{B}]$. Demostrar que
$$[\hat{A}^m, \hat{B}] = m\hat{A}^{m-1}[\hat{A}, \hat{B}].$$
   Calcular la expresión correspondiente a $[\hat{A}, \hat{B}^n]$.

4. Mostrar que $[e^{\eta\hat{A}}, \hat{B}] = \eta e^{\eta\hat{A}}[\hat{A}, \hat{B}]$. Calcular $[\hat{A}, e^{\eta\hat{B}}]$.

5. La derivada de un operador $\hat{A}(\lambda)$ que depende explícitamente de un parámetro λ se define como
$$\frac{d\hat{A}(\lambda)}{d\lambda} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\hat{A}(\lambda + \epsilon) - \hat{A}(\lambda)}{\epsilon}.$$
   Mostrar que
$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(\hat{A}\hat{B}) &= \frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{B} + \hat{A}\frac{d\hat{B}}{d\lambda} \\ \frac{d}{d\lambda}(\hat{A}^{-1}) &= -\hat{A}^{-1}\frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{A}^{-1} \end{aligned}$$

§ http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/formalismo1

6. Considerar $\hat{A}(s) \equiv e^{s\hat{L}}\hat{A}e^{-s\hat{L}}$. Demostrar:
   (a) $\frac{d\hat{A}(s)}{ds} = [\hat{L}, \hat{A}(s)]$
   (b) $\frac{d^2\hat{A}(s)}{ds^2} = [\hat{L}, [\hat{L}, \hat{A}(s)]]$
   (c) $\frac{d^3\hat{A}(s)}{ds^3} = [\hat{L}, [\hat{L}, [\hat{L}, \hat{A}(s)]]]$

7. Utilizando lo anterior, expandir $\hat{A}(1)$ en una serie de Taylor, y demostrar que
$$e^{\hat{L}}\hat{A}e^{-\hat{L}} = \hat{A} + [\hat{L}, \hat{A}] + \frac{1}{2!}[\hat{L}, [\hat{L}, \hat{A}]] + \frac{1}{3!}[\hat{L}, [\hat{L}, [\hat{L}, \hat{A}]]] + \dots$$

8. Sean $\hat{A}$ y $\hat{B}$, dos operadores que conmutan con $[\hat{A}, \hat{B}]$. Demostrar que
$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$$

   Ayuda:
   (a) Mostrar que $[e^{\eta\hat{A}}, \hat{B}] = \eta e^{\eta\hat{A}}[\hat{A}, \hat{B}]$
   (b) Definimos $\hat{g}(\eta) \equiv e^{\eta\hat{A}}e^{\eta\hat{B}}e^{-\eta(\hat{A}+\hat{B})}$.
   Demostrar que la derivada es: $\frac{d\hat{g}}{d\hat{\eta}} = \eta[\hat{A}, \hat{B}]\hat{g}$.
   (c) Integrar la ecuación anterior.

9. Sean $\hat{A}$ y $\hat{B}$, dos operadores que conmutan con $[\hat{A}, \hat{B}]$. Demostrar que
$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{[\hat{A},\hat{B}]}$$