

# Física del Plasma: Diagnósticos de Plasmas en Astrofísica y Fusión

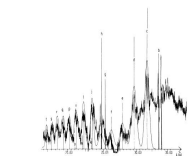
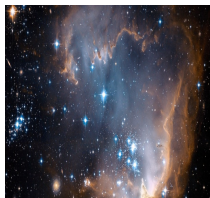
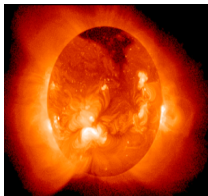


FIG. 1. Experimental spectrum of Fe in laser-produced plasma (this work), compared with theoretical UTA. The intensity of each array was adjusted to obtain the best fit.  $3d-3P^{1/2}3d^2$  transitions:  $4.3-4.8$  eV;  $3d-3P^{1/2}3d^2$  transitions:  $6.4-6.8$  eV;  $3d-3P^{1/2}3d^2$  transitions:  $7.8-8.2$  eV;  $3d-3P^{1/2}3d^2$  transitions:  $9.2-9.6$  eV;  $3d-3P^{1/2}3d^2$  transitions:  $10.8-11.2$  eV.



**Darío Mitnik**

Instituto de Astronomía  
y Física del Espacio

Departamento de Física  
Universidad de  
Buenos Aires

Argentina

Basado en el curso dictado por Prof. J.L. Schwob  
**The Hebrew University of Jerusalem, Israel.**

# Programa del Curso

1. Física de Plasmas: Conceptos Generales
2. Fusión Termonuclear Controlada
3. **Equilibrio Termodinámico**
4. Procesos fundamentales en Física Atómica
5. Plasmas fuera del equilibrio termodinámico
6. Modelo Coronal
7. Modelo Colisional–Radiativo
8. Diagnóstico de Plasmas

# Programa del Curso

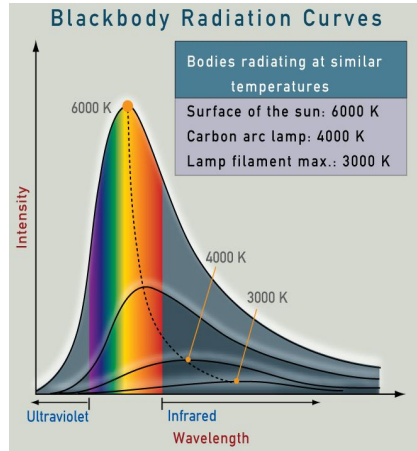
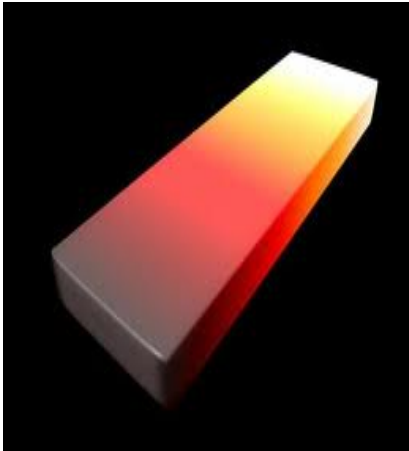
## 3. Equilibrio Termodinámico

- ▶ Leyes básicas: Planck, Kirchhoff y Boltzmann
- ▶ Ecuación de Saha
- ▶ Equilibrio termodinámico local (LTE)
- ▶ Rango de validez de Saha y Boltzmann (criterio de Wilson)
- ▶ Rango de validez de Maxwell (criterio de Spitzer)

### 3. Equilibrio Termodinámico (T.E.)

- ▶ T.E.: Cada proceso elemental está balanceado completamente por su reacción inversa (el mismo número de reacciones por tiempo por volumen).
- ▶ En general, los plasmas de laboratorio no están en T.E., pero es el caso más simple para estudiar.
- ▶ En estas condiciones, el estado del plasma se describe por medio de leyes físicas simples y conocidas, sin necesidad de un análisis detallado de todos los procesos que ocurren en él.

# Radiación de Cuerpo Negro



# Radiación de Cuerpo Negro

Ley de Planck: La intensidad específica de radiación de cuerpo negro está dada por la función de Planck  $B_\nu$

$$J_\nu(T) = B_\nu(T) \equiv \frac{2 h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$J_\nu$  es la radiancia espectral (potencia por área, por ángulo sólido y por rango de frecuencias, por ej.  $\frac{\text{erg}}{\text{s cm}^2 \text{ sterad}} \text{ s}$ ).

Esta distribución se deriva de la estadística cuántica de Bose–Einstein, y cumple con la *Ley de Wien* y la *Ley de Stefan–Boltzmann* (ver práctica).

# Ley de Planck – Aspectos de su Derivación

- ▶ Número de fotones y densidad de energía en equilibrio.  
Relación entre intensidad y densidad de energía:

$$J_\nu = \frac{c}{4\pi} U_\nu$$

- ▶ Densidad de energía determinada por la densidad de osciladores:

$$U_\nu d\nu = \langle E \rangle g(\nu) d\nu$$

- ▶ Densidad de estados en equilibrio en una cuerda L:

$$kL = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n} \Rightarrow \nu = \frac{nc}{2L}$$

- ▶ El número de modos entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$  es  $dn = \frac{2L}{c} d\nu \Rightarrow$

$$d^3\nu = \frac{4\pi}{8} \nu^2 d\nu$$

- ▶ La densidad total de estados es:

$$g(\nu)d\nu = \frac{N}{V} = \frac{2 \times (2L/c)^3 (4\pi/8) \nu^2 d\nu}{L^3} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^3 d\nu$$



# Ley de Planck – Aspectos de su Derivación

- ▶ La energía promedio se obtiene suponiendo una partición de equilibrio  $P(n) \propto e^{(-E_n/kT)} = e^{(-nh\nu/kT)}$ :

$$\langle E \rangle = \sum E_n P(n) = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

- ▶ La densidad de energía es:

$$U_\nu d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} d\nu$$

- ▶ La Intensidad  $J_\nu = \frac{c}{4\pi} U_\nu$  da la función de Planck. En longitud de onda, se obtiene:

$$J_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1}$$

(Detalles y problemas en la práctica)

# Interacción radiación–materia

Ley de Kirchhoff: El cociente entre la emisividad  $j_\nu$  y la absorción  $k_\nu$  es la función de Planck  $B_\nu$

$$\frac{j_\nu(T)}{k_\nu(T)} = B_\nu(T)$$

$j_\nu$  es la emisividad (potencia por volumen, por ángulo sólido y por rango de frecuencias, por ej.  $\frac{\text{erg}}{\text{s cm}^3 \text{ sterad s}}$ ).

$k_\nu$  es el coeficiente de absorción lineal (fracción de la intensidad de radiación absorbida por distancia, por ej.  $\text{cm}^{-1}$ ).

# Distribución de velocidades

Ley de Maxwell: La probabilidad de que una partícula tenga una velocidad entre  $v$  y  $v + dv$  (o, equivalentemente, el número relativo de partículas que tengan esta velocidad) está dado por:

$$\frac{dn}{n} = f(v) dv = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

En términos de energía cinética, se escribe:

$$\frac{dn}{n} = f(E) dE = \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE$$

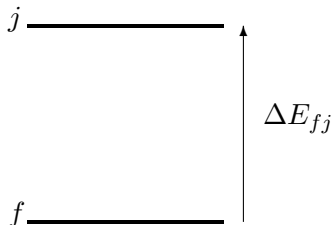
Esta distribución se deriva de la estadística cuántica de Fermi–Dirac.

# Excitación de Átomos

Ecuación de Boltzmann:

$$\frac{n_j}{n_f} = \frac{g_j}{g_f} e^{-\frac{\Delta E_{fj}}{kT}}$$

- ▶  $E_{fj}$  es la energía de excitación desde el estado fundamental  $f$  al nivel  $j$ .
- ▶ Pesos estadísticos:  
 $g = 2J + 1$  (para un nivel)  
 $g = (2L + 1)(2S + 1)$  (para un término).
- ▶ La población relativa depende **exclusivamente de la temperatura.**



# Excitación de Átomos

La población de un estado excitado  $j$  puede ser escrita en referencia a la densidad total del ión  $n_{ion}$ :

$$\begin{aligned}
 n_{ion} &= \sum_j^{\infty} n_j = n_f \left( 1 + \frac{n_2}{n_f} + \frac{n_3}{n_f} + \dots \right) \\
 &= \frac{n_f}{g_f} \left( g_f + g_2 e^{-\frac{\Delta E_{f2}}{kT}} + g_3 e^{-\frac{\Delta E_{f3}}{kT}} + \dots \right) \\
 &= \frac{n_f}{g_f} U_{ion}
 \end{aligned}$$

donde  $U_{ion}$  es la **función de partición**

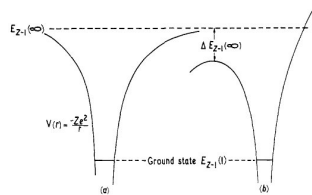
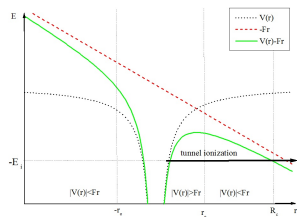
- ▶  $U_{ion}$  depende **exclusivamente de la temperatura**.
- ▶ La degeneración de estados  $g_n = 2n^2$  (hidrogénico). La energía tiende a una constante (energía de ionización). Por lo tanto, si  $T \neq 0$ , aparentemente  $U_{ion}$  diverge !!

# Excitación de Átomos

## Teoría de Unsöld:

Considerando la perturbación de los iones cercanos, el potencial Coulombiano se ve modificado y la sumatoria se hace hasta un nivel máximo  $j_{\max}$

$$U_{ion} = \sum_j^{j_{\max}} g_j e^{-\frac{\Delta E_{fj}}{kT}}$$

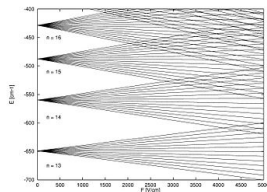


# Excitación de Átomos

## Efecto Stark:

Otra forma de considerar la perturbación es asumiendo que los micro-campos del plasma producen el desdoblamiento de Stark de los niveles.

Los niveles altos, que están cerca del continuo, se solapan con éste, reduciendo la energía de ionización, y produciendo un máximo nivel ligado.



# Excitación de Átomos

Teoría de Griem:

$$\lambda_D \equiv \left( \frac{\epsilon_0 k T_e}{n e^2} \right)^{1/2}$$

$$\lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 k T_e}{e^2 (n_e + \sum_q q^2 n_q)} \right)^{1/2}$$

La energía de ionización  $\chi_q$  ahora disminuye en

$$\Delta\chi_q = (q + 1) \frac{e^2}{\lambda_D}$$

El nivel máximo  $j_{\max}$  está limitado ahora por

$$\Delta E_{f j_{\max}} \leq \chi_q - \Delta\chi_q$$



# La Ecuación de Saha

La distribución de población (total) entre los estados de ionización sucesivos está dada por:

$$\frac{n_{q+1}}{n_q} = \frac{1}{n_e} \frac{2 U_{q+1}(T)}{U_q(T)} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_q}{kT}\right)$$

La relación entre densidades de niveles  $k$  del ión  $q + 1$  y  $j$  del ión  $q$  es:

$$\frac{n_{q+1,k}}{n_{q,j}} = \frac{1}{n_e} \frac{2 g_{q+1,k}}{g_{q,j}} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\Delta E_{jk}}{kT}\right)$$

Las densidades entre iones diferentes dependen **tanto de la  $T_e$  como de  $n_e$**  .

# Validez de Condiciones de Equilibrio Termodinámico

- ▶ Si se asume Equilibrio Termodinámico, entonces cada proceso elemental debe estar balanceado por su proceso inverso. Por ejemplo, cada fotón emitido debe ser inmediatamente reabsorbido dentro del plasma. El *ancho óptico* debe ser muy grande  $\tau(\lambda) \gg 1$ .
- ▶ La radiación debe ser Planckiana (puro continuo).
- ▶ La temperatura debe ser uniforme.

# E.T. en Plasmas de Laboratorio

- ▶ El flujo de radiación es muy grande, y produce una presión insostenible en un laboratorio:

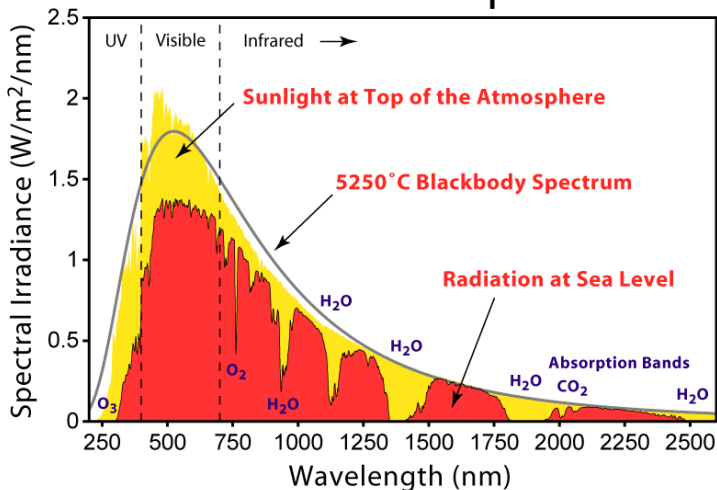
$$J = \int_0^{\infty} J_{\nu} d\nu = \sigma T^4$$

(a  $T = 10^8$  K, el flujo de radiación es  $\approx 10^{21}$  W/cm<sup>2</sup>).

- ▶ No existe más el equilibrio.
- ▶ Existen gradientes de temperatura.
- ▶ La radiación no es sólo continua, también hay líneas espectrales.

# Validez de Condiciones de Equilibrio

## Solar Radiation Spectrum



# Equilibrio Termodinámico Local L.T.E.

En este modelo, existen zonas en las que se define el equilibrio localmente. En este contexto:

- ▶ No es más válida la ley de Planck.
- ▶ La emisividad en cada punto cumple la Ley de Kirchhoff, pero  $J_\nu \neq B_\nu$ .
- ▶ Si los procesos radiativos son relativamente menos importantes que los colisionales, se puede asumir balance entre estos últimos. Eso implica que siguen siendo válidos **Saha y Boltzmann**.
- ▶ También es válido **Maxwell**, ya que depende de las colisiones elásticas.

# Rango de Validez de L.T.E.

## Validez de Saha

Los procesos colisionales deben ser dominantes (en relación a los radiativos). Esto ocurre en **Plasmas Densos**

- ▶ Fotoionización  $\ll$  Ionización por impacto de electrones
- ▶ Recombinación Radiativa  $\ll$  Recombinación colisional

# Rango de Validez de L.T.E.

## Validez de Boltzmann

Las condiciones son más restrictivas

► **Colisionales:**

(a) Excitación  $\rightleftharpoons$  (b) De-Excitación

► **Radiativos:**

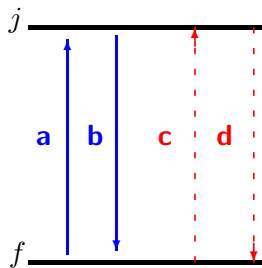
(c) Absorción de fotones  $\rightleftharpoons$  (d) Decaimiento

► En TE:  $a \rightleftharpoons b$  y  $c \rightleftharpoons d$

► En LTE:  $c < d$  (escapa radiación), entonces  
 $a \rightleftharpoons b + (d - c)$

► LTE: Para que se cumpla el balance colisional:

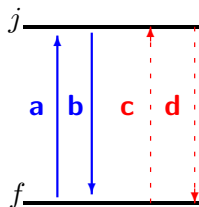
$$b \gg d$$



# Rango de Validez de L.T.E.

## Criterio de Wilson

- ▶ Los coeficientes de transición radiativa dominantes, son en general, aquellos que terminan en el estado fundamental
- ▶ Se puede imponer como criterio de validez
 
$$10\% b \geq d$$
- ▶ Una aproximación posible es calcularlo en hidrógeno (y hacer la correspondiente escala con el ión correspondiente), para la transición  $2 \rightarrow 1$  (Griem), o  $\infty \rightarrow 1$  (Wilson).

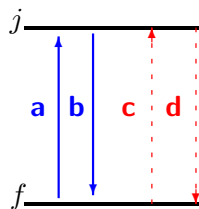




# Rango de Validez de L.T.E.

## Criterio de Wilson

$$\begin{aligned}
 n_e \text{ [cm}^{-3}\text{]} &\geq 5.6 \times 10^{17} Z^7 \left( \frac{kT}{Z^2 \chi_H} \right)^{1/2} \left( \frac{\chi_q}{Z^2 \chi_H} \right)^3 \\
 &\geq 6 \times 10^{13} (kT \text{ [eV]})^{1/2} (\chi_q \text{ [eV]})^3
 \end{aligned}$$



# Rango de Validez de L.T.E.

## Equilibrio y Temperatura

- ▶ En la teoría cinética de gases, la distribución de velocidades en equilibrio es Maxwelliana. De allí se deriva el concepto de temperatura cinética.
- ▶ Si la distribución de velocidades no es Maxwelliana, entonces en lugar de temperatura, se designa una  $\langle E_k \rangle$
- ▶ Para que las condiciones estadísticas sean válidas, es necesario que el **camino medio** de las partículas sea mucho menor a las dimensiones del recipiente.
- ▶ El tiempo entre colisiones también debe ser mucho menor a otros tiempos característicos

# Rango de Validez de L.T.E.

## Equilibrio y Temperatura

- ▶ Generalmente, en los laboratorios, los electrones tienen caminos libres y tiempos de colisiones cortos, por lo que tiene sentido hablar de  $T_e$
- ▶ Esto no ocurre con los iones.
- ▶ Análogamente se puede considerar una temperatura de radiación  $T_R$ . En general, el camino libre óptico es muy grande, excediendo las dimensiones del plasma, por lo que raramente existe  $T_R$ .

# Rango de Validez de L.T.E.

## Termalización

- ▶ Los plasmas de laboratorio se generan por descargas
- ▶ La energía cinética se transmite por el campo eléctrico, no por colisiones
- ▶ Esto implica un plasma no-termal (no Maxwelliano)
- ▶ ¿Bajo qué condiciones las colisiones elásticas producen la termalización?

# Termalización

## Criterio de Spitzer

- ▶ **Tiempo de relajación** ( $t_{rr}$  – *self-collision time*):  
Termalización por colisiones entre partículas  $r$ .

$$t_{rr} \approx \frac{A_r^{1/2} T_r^{3/2}}{n_r Z_r^4} \text{ [s]}$$

$A_r$ : peso atómico de  $r$   
 $[n_r] = \text{cm}^{-3}$ ,  $[T] = \text{K}$ .

- ▶ **Tiempo de equipartición** ( $t_{rt}$ ):  
Termalización por transferencia entre las partículas  $r$  (“el campo”) y otro grupo (“test”).

$$t_{rt} \approx \frac{A_r A_t}{n_r Z_r^2 Z_t^2} \left( \frac{T_r}{A_r} + \frac{T_t}{A_t} \right)^{3/2}$$

Ejemplo electron–protón (práctica):  $2 t_{ep} \approx 43 t_{pp} \approx 1823 t_{ee}$

# Condiciones de Termalización

1.  $t_{rr} \ll t_P$       ▶  $t_p$ : Tiempo de confinamiento
  2.  $t_{rr} \ll t_E$       ▶  $t_E$ : Tiempo de calentamiento  $E \approx kT$
  3.  $t_{rr} \ll t_{Brm}$       ▶  $t_{Brm}$ : Tiempo decaimiento Bremsstrahlung
- ▶ Puede ocurrir que  $T_{ee} \ll t_{Pe}, t_{Ee}, t_{Be}$  y que  $T_{ii} \ll t_{Pi}, t_{Ei}, t_{Bi}$ . En ese caso existirían ambas temperaturas. Pero aún así puede ocurrir que  $T_e \neq T_i$
- ▶ Para iones de  $Z$  muy grande,  $t_{ii}$  es muy chico ( $Z^{-4}$ ).

# Termalización: Conclusión

- ▶ Colisiones electrón–ión pesado: muy eficientes para cambiar las velocidades ( $v_e$  isotrópica).
- ▶ Colisiones electrón–electrón: Termalización rápida  $\rightarrow T_e$ .
- ▶ Colisiones ión–ión: rápida para iones pesados  $\rightarrow T_i$ .
- ▶ Colisiones electrón–ión: Equipartición sólo si el  $t_{ei}$  es suficiente: en ese caso  $T_e = T_i = T$ .